

文章编号 1004-924X(2008)11-2104-06

三次位相传播中的波像差及在 CGH 中衍射级次的分离

许英朝^{1,2}, 周平³, 张新¹

- (1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所 光学技术研究中心, 吉林 长春 130033;
2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039; 3. 美国亚利桑那大学 光学中心, 图森 Az85721)

摘要: 设计了利用计算全息图(CGH)作为零位补偿器来检测三次位相板的光学系统, 最重要的两个理论问题是三次位相在空间传播过程中产生的波像差的具体形式和经过 CGH 衍射后衍射级次的分离。本文推导了三次位相在传播过程中产生高阶像差的理论公式, 并由公式得出高阶项随着传播距离的增大而增大的结论。讨论了检测光波经过 CGH 衍射后衍射级次分离的理论过程。设计了一个用 CGH 检测三次位相板的系统作为例证, 通过在 CGH 位相方程中引入高阶项四次项和五次项, 使得残余波像差从原来的 0.75λ 降至 0.007λ 。实验得到的传播过程中的波像差及衍射级次的分离, 都与理论推导相吻合。

关键词: 光学检测; 计算全息; 三次位相; 波像差; 衍射级次分离

中图分类号: O438.1 **文献标识码:** A

Wavefront aberration of cubic phase in propagation and order separation by computer generated hologram

XU Ying-chao^{1,2}, ZHOU Ping³, ZHANG Xin¹

- (1. *Optical Technology Research Center, Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;*
2. *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China;*
3. *Center of Optical Sciences, University of Arizona, Tucson Az85721, America*)

Abstract: In the design of cubic phase plate testing system by taking Computer Generated Hologram (CGH) as a null lens, two very important principles are the wavefront aberration of cubic phase in propagation and the separation of diffraction orders. The cubic phase introduced higher order aberration in propagates was presented, and an expression for the aberration of cubic phase in propagating was deduced in detail. From the expression, it was shown that the high order aberration increases as the propagation distance l increase. The theoretical foundation for the diffraction order separation of testing wavefront diffracted by the CGH was discussed. To prove the theories, a cubic phase plate testing system was designed for an example. By introducing the 4th and the 5th order items, the wavefront aberration reduced from 0.7λ to 0.007λ . The results coincide with the theoretical formula well.

Key words: optical testing; Computer Generated Hologram(CGH); cubic phase; wavefront aberration; diffraction order separation

收稿日期: 2008-01-16; 修订日期: 2008-03-04.

基金项目: 中国科学院长春光机所三期创新工程重点支持项目(No. 069Y32J060)

1 引言

三次位相板作为一种波前编码^[1]元件以其能够提高系统性能,减少光学系统质量,简化光学系统的结构等突出优点,正在逐渐成为新颖的光电成像系统的关键元件之一。然而因其非旋转对称的复杂面型,传统光学零位补偿器^[2](如 Offner 补偿器)显然已经无法应用于其检测系统中。1971 年 J. C. Wyant 提出了计算全息(Computer Generated Hologram,CGH)^[3]技术检测非球面,这是由于计算全息图可以产生想要的任意形状的波前,将其应用于三次位相板的检测是一种非常好的途径。

对于三次位相板的检测,要设计 CGH 作零位补偿器的检测系统,最重要的是要理解三次位相在传播过程的高次波像差的影响和衍射级次的分离这两个问题。尤其是第一个问题是设计旋转对称的非球面的检测系统时尚未涉及过的。

本文详细推导了三次位相在传播中产生的高阶像差的公式,给出了各阶像差的具体形式,由公式得到高阶项随传播距离 l 的增大而增大,且满足一个指数增大的关系。讨论了计算全息图再现时检测光波经过 CGH 衍射后衍射级次分离的理论过程,给出了检测波与邻近衍射级次分离距离的表达式。设计了一个用 CGH 检测三次位相板的系统作为例证,说明了无论是传播过程中的波像差还是衍射级次的分离,都得到与理论推导相吻合的结果。

2 引入的波像差公式推导^[4]

三次位相传播过程中会引入高阶像差。其中有两种形式的像差:映射偏差(mapping distortion)和各点光程差不等造成的偏差(OPL difference)。映射偏差是指波面传播过程中的坐标发生变换;光程差的不同是指当波前传播时不同的光线走过的距离不等。最后产生的波像差是这两种像差共同作用的结果,如图 1 所示。

在 $x-y$ 平面内三次位相的波面方程如下:

$$W(x,y)=\alpha(x^3+y^3), \quad (1)$$

式(1)的一阶导数即为三次位相的波前在该平面内的斜率,可以表示成下式:

$$W'(x,y)=iW'_x'+jW'_y'=i3\alpha x^2+j3\alpha y^2, \quad (2)$$

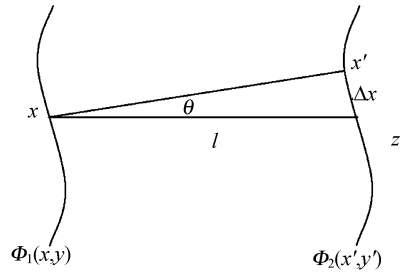


图 1 三次位相波前在空间传播

Fig. 1 Wavefront propagation of cubic phase in space

式(1)的二阶导数为:

$$W''(x,y)=iW''_x'+jW''_y'=i6\alpha x+j6\alpha y, \quad (3)$$

当波前传播到一个新的平面 $x'-y'$ 的位置,且新平面与 $x-y$ 平面沿 z 轴的距离为 l , $W_2(x',y')$ 是在新坐标系下的新的波前表述:

$$\begin{aligned} x' &= x + W'_x(x) \cdot l, y' = y + W'_y(y) \cdot l, \quad (4) \\ W_2(x',y') &= W_{\text{map}}(x',y') + W_{\text{OPD}}(x',y') = \\ &= W_1(x,y) + l/\cos \theta - l = \\ &= W_1(x' - W'_x(x)l, y' - W'_y(y)l) + l/\cos \theta - l = \\ &= \alpha[(x' - W'_x(x)l)^3 + (y' - W'_y(y)l)^3] + l/\cos \theta - l, \quad (5) \end{aligned}$$

这里 θ 是光线和 z 轴的夹角:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \sqrt{(W'_x(x)l)^2 + (W'_y(y)l)^2} / l = \\ &= \sqrt{W_x'^2(x) + W_y'^2(y)}, \quad (6) \end{aligned}$$

即:

$$1/\cos \theta = \sqrt{W_x'^2(x) + W_y'^2(y) + 1}, \quad (7)$$

通过泰勒展开,可以得到:

$$\begin{aligned} W_x'(x) &= W_x'(x' - \Delta x) = \\ &= W_x'(x') - W_x''(x') \cdot \Delta x = \\ &= W_x'(x') - W_x''(x') \cdot W_x'(x') \cdot l, \quad (8) \end{aligned}$$

假设 l 很小,若讨论的三次位相板的系数和半径 R 亦很小,则上式中第二项可以忽略不计,那么有:

$$W_x'(x) \approx W_x'(x'), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} W_{\text{map}}(x',y') &= \\ &= \alpha[x'^3 - 3x'^2 W_x'(x')l + 3x' W_x'^2(x')l^2 - W_x'^3(x')l^3 + \\ &= y'^3 - 3y'^2 W_y'(y')l + 3y' W_y'^2(y')l^2 - W_y'^3(y')l^3] = \\ &= \alpha[x'^3 - 9\alpha x'^4 l + 27\alpha^2 x'^5 l^2 - 27\alpha^3 x'^6 l^3 + \\ &= y'^3 - 9\alpha y'^4 l + 27\alpha^2 y'^5 l^2 - 27\alpha^3 y'^6 l^3] = \\ &= \alpha(x'^3 + y'^3) - 9\alpha^2 l(x'^4 + y'^4) + \\ &= 27\alpha^3 l^2(x'^5 + y'^5) - 27\alpha^4 l^3(x'^6 + y'^6), \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{OPD}}(x',y') &= l/\cos \theta - l = \\ &= l \cdot \sqrt{W_x'^2(x') + W_y'^2(y') + 1} - l, \quad (11) \end{aligned}$$

假设 θ 很小,那么 W_x', W_y' 很小,只考虑泰勒展开后的低阶项。

$$W_{\text{OPD}}(x', y') = l \cdot \sqrt{W_x'^2(x') + W_y'^2(y') + 1} - l \approx \frac{1}{2} [W_x'^2(x') + W_y'^2(y')] + \frac{9}{2} l \alpha^2 (x'^4 + y'^4), \quad (12)$$

由式(11)、(12)可得 $x'-y'$ 平面内的总的波前:

$$W_2(x', y') = \alpha(x'^3 + y'^3) - \frac{9}{2} \alpha^2 l (x'^4 + y'^4) + 27\alpha^3 l^2 (x'^5 + y'^5) - 27\alpha^4 l^3 (x'^6 + y'^6) + \dots, \quad (13)$$

$$\phi_{\text{cubic}}(x', y') = k[\alpha(x'^3 + y'^3) - \frac{9}{2} \alpha^2 l (x'^4 + y'^4) + 27\alpha^3 l^2 (x'^5 + y'^5) - 27\alpha^4 l^3 (x'^6 + y'^6) + \dots], \quad (14)$$

这里 $\phi_{\text{cubic}}(x', y')$ 是三次位相传播距离 l 后的位相方程,单位是弧度,其中, $k = 2\pi/\lambda$ 为波矢量。

式(14)说明了三次位相在传播过程中引入了高阶波像差,并且偶数阶的像差的系数与奇次项的系数具有相反的符号,高于三次项的高阶项差都随着 l 的增大而增大,若 l 很小,可以只考虑四次项,若 l 较大,更高阶的像差($x'^5 + y'^5$)、($x'^6 + y'^6$)...便不可忽略,可以用来修正最终的波前。

3 衍射级次的分离

离轴光学全息图可以看成是物光波和倾斜参考波相叠加而形成的干涉图,光强分布为:

$$\nu_{mx} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial [m\phi_{\text{CGH}}'(x, y) - \phi'_{\text{cubic}}(x, y)]}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial \left\{ m \left[\phi_{\text{CGH}}(x, y) + \phi_{\text{tilt}} \cdot \frac{x}{r} \right] - \left[\phi_{\text{cubic}}(x, y) + \phi_{\text{tilt}} \cdot \frac{x}{r} \right] \right\}}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial \left\{ [m\phi_{\text{CGH}}(x, y) - \phi_{\text{cubic}}(x, y)] + [(m-1)\phi_{\text{tilt}} \cdot \frac{x}{r}] \right\}}{\partial x}, \quad (18)$$

$$\nu_{my} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial [m\phi'_{\text{CGH}}(x, y) - \phi'_{\text{cubic}}(x, y)]}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial \left\{ m \left[\phi'_{\text{CGH}}(x, y) + \phi_{\text{tilt}} \cdot \frac{y}{r} \right] - \left[\phi'_{\text{cubic}}(x, y) + \phi_{\text{tilt}} \cdot \frac{y}{r} \right] \right\}}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial \left\{ [m\phi_{\text{CGH}}(x, y) - \phi_{\text{cubic}}(x, y)] + [(m-1)\phi_{\text{tilt}} \cdot \frac{y}{r}] \right\}}{\partial y}, \quad (19)$$

其中, ϕ_{tilt} 是加入的位相倾斜量,单位是弧度。 r 为

$$I(x_0, y_0) = A^2 + O^2(x, y) + 2AO(x, y) \cos[2\pi\nu_{\text{tilty}}'y' - \phi(x, y)], \quad (15)$$

其中, ν_{tilty}' 是倾斜参考光波的空间频率, $\phi(x, y)$ 是物光波的相位分布, A, O 分别是参考波和物光波的振幅。 ν_{tilty} 的大小决定了其再现时各级次的衍射波分开的情况。

同样,在设计计算全息图零位补偿器的时候要考虑在 CGH 的位相方程中加入一定的倾斜,从而使检测光波和其他级次的衍射波能够完全分离。如图 2 所示,衍射 1 级光为检测光波,其他级次的衍射光波被小孔光阑滤掉。

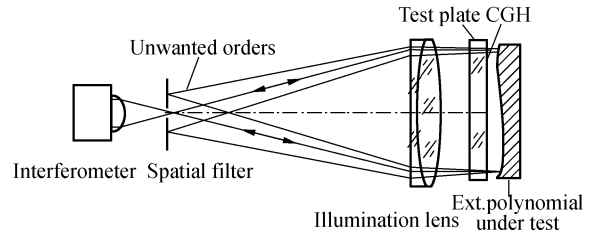


图 2 检测系统示意图

Fig. 2 Sketch of testing system

空间频率的定义可以写成下式^[5]:

$$\nu_x = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x}, \nu_y = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}, \quad (16)$$

经 CGH 补偿后各级次衍射波的相位写为:

$$m\phi_{\text{CGH}}'(x, y) - \phi'_{\text{cubic}}(x, y), \quad (17)$$

于是谱面上各衍射级次的空间频率可写为:

归一化半径,单位是 mm。 $\phi_{\text{CGH}}(x, y)$ 、 $\phi_{\text{CGH}}'(x, y)$

分别是引入位相倾斜前后的 CGH 的位相方程; $\phi_{\text{cubic}}(x, y)$ 、 $\phi'_{\text{cubic}}(x, y)$ 分别是三次位相板引入倾斜前后的位相方程。这里 CGH 引入位相倾斜后需在三次位相板加入同样的倾斜以使得检测光波回到光轴上来。

对于 +1 级衍射光波(检测光波), $m=1$,且 $\phi_{\text{CGH}}(x, y)=\phi_{\text{cubic}}(x, y)$,故 $\nu_{1x}=0, \nu_{1y}=0$ 。

对于其它级次的衍射光,由以上两个式子,可知其衍射波面的空间频率是:

$$\begin{cases} \nu_{mx} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial[(m-1) \cdot \phi_{\text{cubic}}(x, y)]}{\partial x} - \frac{(m-1)}{2\pi} \cdot \frac{\phi_{\text{tilt}}}{r} \\ \nu_{my} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial[(m-1) \cdot \phi_{\text{cubic}}(x, y)]}{\partial y} - \frac{(m-1)}{2\pi} \cdot \frac{\phi_{\text{tilt}}}{r} \end{cases} \quad (20)$$

可见在像面处检测光波(+1 级光波)的空间频率近似为零,而其它级次的空间频率均不为零。

由上式可知,决定各个衍射级次分离的空间频率是:

$$\nu_{\text{tiltx}} = \nu_{\text{tilty}} = (m-1)\phi_{\text{tilt}}/2\pi r, \quad (21)$$

其中式(20)、(21)仅仅适用于本文讨论的待检面为三次位相板的情形。

当在像面处设置光阑时,各衍射级次的截止情况取决于光阑的截止频率:

$$\nu_{\text{cut-off}} = \frac{r'}{\lambda L}, \quad (22)$$

其中, r' 为光阑半径, L 为光阑到照明系统的距离。显然,光阑越小,截至频率越低,越有利于滤掉不必要的级次。然而实际上照明系统的误差和待检的三次位相板元件的制作误差都使得光阑不能任意小。

本文最关心的是+1 级衍射光与其邻近的衍射级次的分离情况,易知影响+1 级衍射光和 0 级、+2 级衍射光的分离的那部分空间频率:

$$|\nu_{\text{tiltx}}'| = |\nu_{\text{tilty}}'| = \phi_{\text{tilt}}/2\pi r, \quad (23)$$

应该满足条件:

$$\nu_{\text{cut-off}} \leq \nu_{\text{tilt}}' = \sqrt{2} \cdot \phi_{\text{tilt}}/2\pi r, \quad (24)$$

容易得到:

$$r' \leq \sqrt{2}\lambda L\phi_{\text{tilt}}/2\pi r, \quad (25)$$

即在光阑到照明系统的距离一定的情况下,CGH 位相方程中加入的倾斜量越大,针孔光阑便可以做的越大一些。

4 模拟实验验证

下面以本文设计完成的用 CGH 检测三次位相板的检测系统的具体参数为实例,来验证前面理论推导的准确性。

4.1 三次位相传播过程的像差公式的验证

该检测系统是用 CGH 的 1 级(或-1 级)衍射光产生与待检的三次位相板完全相反的波前,即 CGH 作为零位补偿器。在 Zemax 软件中设计时,CGH 所在面的表面类型设为“binary 1”(非旋转对称的二元面),倘若三次位相在传播过程中没有引入高阶次像差(对于三次项而言),则仅需要用二元面的三次项“X3Y0, X0Y3”补偿即可;而若三次位相在传播过程中引入了高阶像差,则须加如四次项“X4Y0, X0Y4”、五次项“X5Y0, X0Y5”甚至其它更高阶项去补偿。

系统的设计波长为 632.8 nm,待检的三次位相板的口径为 13 mm, $\alpha=0.000\ 07\ \text{mm}^{-2}$,CGH 到待检面的距离 $l=6\ \text{mm}$,由式(13)可以算出三次位相传播过程中的波像差的三次项为:

$$\begin{aligned} w_3 &= \alpha(x^3 + y^3) = 7 \times 10^{-5}(6.5^3 + 6.5^3) = \\ & 38.447\ 5\ \mu\text{m} = 60.758\ \lambda, \end{aligned} \quad (26)$$

四次项为:

$$\begin{aligned} w_4 &= -\frac{9}{2}\alpha^2 l(x^4 + y^4) = \\ & -4.5 \times 0.000\ 07^2 \times 6(6.5^4 + 6.5^4) = \\ & -0.236\ 16\ \mu\text{m} = -0.746\ 4\ \lambda, \end{aligned} \quad (27)$$

五次项为:

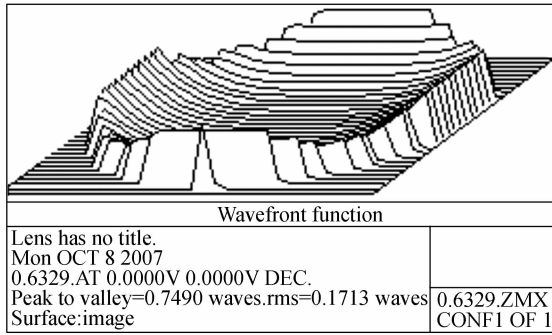
$$\begin{aligned} w_5 &= 27\alpha^3 l^2(x^5 + y^5) = \\ & 27 \times 0.000\ 07^3 \times 6^2(6.5^5 + 6.5^5) = \\ & 0.012\ 2\ \lambda, \end{aligned} \quad (28)$$

表 1 为在 Zemax 软件中的 CGH 的各项系数、对应的波像差与理论算出的波像差的关系,表中最后一行数据分别是 CGH 方程中引入三次项,三和四次项,三、四和五次项检测系统的补偿残余波像差(如图 3)。

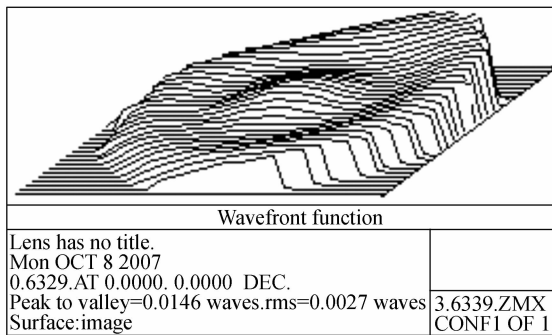
表 1 CGH 对应波像差与理论波像差的关系

Tab. 1 Relationship between the aberration of CGH and the theoretical aberration

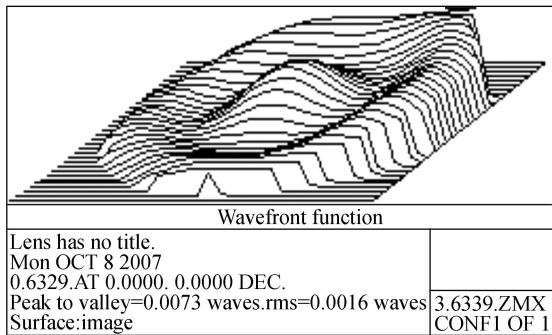
	三次项	四次项	五次项
各项理论波像差	60.758 λ	-0.746 4 λ	0.012 2 λ
CGH 对应波像差	-60.758 λ	0.747 7 λ	-0.012 3 λ
残余波像差	0.749 0 λ	0.014 6 λ	0.007 3 λ



(a)CGH 中仅引入三次项
(a)Just adding the 3rd term



(b)CGH 中引入三次项和四次项
(b)Adding the 3rd and the 4th terms



(c)CGH 中引入三、四次项和五次项
(c)Adding the 3rd,the 4th and the 5th terms

图 3 设计的检测系统的残余波像差

Fig. 3 Residual aberrations of designed testing system

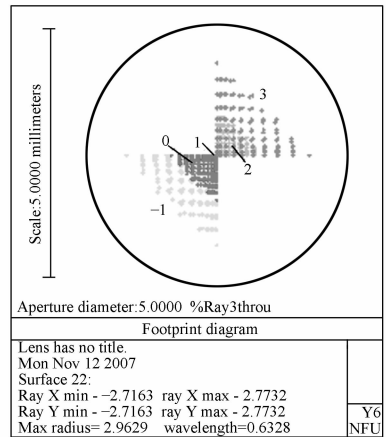
由表 1 中数据可以看出,CGH 的各项系数对应的波像差与理论算出的波像差仅相差一个负号,二者绝对值相等。因为检测中就是用 CGH 产生的波像差去补偿待检的三次位相板的波像差,故符号是相反的。CGH 方程中仅引入三次项,仍有较大的残余波像差 0.749λ ;而引入三次

项和四次项,残余波像差降为 0.0146λ ;引入三、四、五次项,残余波像差仅为 0.0073λ 。需要指出的是这里的残余波像差包含了图 2 中所示的准直系统的波像差,但是设计准直系统的残余波像差仅为 0.0022λ ,这与三、四、五次项的像差(表 1)相比可以认为是很小的。

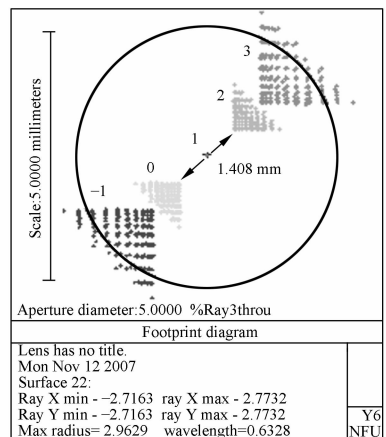
由上面的设计得到的数据,有力地说明了三次位相传播过程中会引入高阶次的波像差,同时很好的验证了式(13)的正确性。

4.2 衍射级次分离

在设计中,光阑面(级次分离的谱面)到照明系统的距离为 $L=51.5 \text{ mm}$,CGH 位相方程中在 $x、y$ 方向加入的位相倾斜都为 100λ (628.318 rad)。使得衍射级次得以如图 4 所示。



(a)没有引入位相倾斜
(a)Before adding the phase tilt



(b)引入了位相倾斜
(b)After adding the phase tilt

图 4 CGH 引入位相倾斜前后衍射级次的分离

Fig. 4 Separation of diffraction orders for CGH before and after adding phase tilt

由式(25)可以算出光阑的最大孔径为:

$$r' = \sqrt{2\lambda L \phi_{\text{int}} / 2\pi r} =$$

$$0.6328 \times 10^{-3} \times 51.2 \times 628.318 \times \sqrt{2} / 2\pi \times 6.5 =$$

$$0.7048 \text{ mm}$$

而在 Zemax 中光线追迹得到的 1 级光和相邻的级次分离开的距离是 $d = 1.408/2 = 0.704 \text{ mm}$ 。可见通过理论计算得到的结果和运用光线追迹得到的结果是一致的。

通过这个实例,本文应用了前面的理论公式对 CGH 的具体形式加入的高阶项进行了修正,而修正的结果又恰恰证明了所推导的结论的正确性。光线追迹也验证了衍射级次分离的表述。

5 结 论

详细推导了三次位相在空间传播时产生的

高阶像差的公式;根据离轴光学全息图的再现时级次分离原理,并将其合理推广到复杂波面的计算全息干涉图中,推导了检测波(1 级衍射光)与邻近衍射级次分离开距离的表达式。对于利用 CGH 作为零位补偿器的复杂面形的检测系统设计具有一定的指导意义。

根据推导的三次位相在传播过程中产生的波像差的理论公式,设计了一个用 CGH 检测三次位相板的系统作实例,通过在 CGH 位相方程中引入了高阶项四次项和五次项,使得残余波像差从原来的 0.75λ 降至 0.007λ 。1 级光和相邻的级次分离的距离由文中所推到的公式算出的结果和由光学设计软件得到的结果分别为 0.7048 mm 和 0.7040 mm ,结果是一致的。无论是三次位相的高阶像差还是衍射级次的分离情况,都得到了与理论推导相吻合的结果。

参考文献:

- [1] JR E R D, CATHEY W T. Extend depth of field through wave-front coding [J]. *Appl. Opt.*, 1995, 34(11):1859-1866.
- [2] JUANG J D, CHANG M W. The testing of a general rotationally symmetrical aspherical surface by using a null lens in a Zygo interferometer [J]. *Measurement*, 1994, 13(2):85-90.
- [3] WYANT J C. Testing aspherics using two-wavelength holography [J]. *Appl. Opt.*, 1971, 10(9):2113-2118.
- [4] 许英朝,张新,周平. 一种三次非旋转对称的位相板的检测系统设计[J]. *光学学报*, 2008, 28(5):971-975.
XU Y CH, ZHANG X, ZHOU P. Optical design for cubic phase plate testing system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, 28(5):971-975. (in Chinese)
- [5] 虞祖良,金国藩. 计算机制全息图[M]. 北京:清华大学出版社,1984.
YU Z L, JIN G F. *Computer-generated Hologram* [M]. Beijing: Publishing House of Tingshua University Press, 1984. (in Chinese)

作者简介:许英朝(1981—),男,山东莘县人,博士研究生,主要研究方向为光学设计和光学检测。E-mail: xuyc2004@163.com

通讯作者:张新(1968—),男,吉林人,研究员,主要研究方向为成像、非成像光学系统的总体设计。E-mail: optlab@ciomp.ac.cn